

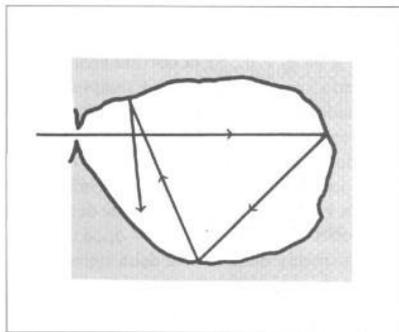
Teoria classica del corpo nero

a cura di Giancarlo Buccella

2 Modello e descrizione fisica

Un corpo solido emette, per effetto dell'agitazione termica degli atomi, una radiazione elettromagnetica, uniformemente distribuita in tutte le direzioni e non polarizzata, con uno spettro continuo che si estende, a temperature ordinarie, dalle microonde all'ultravioletto e la cui forma ha un aspetto caratteristico che dipende dalla temperatura assoluta.

Si definisce corpo nero un oggetto ideale opaco (ossia con coefficiente di trasmissione pari a zero) che assorbe tutta la radiazione elettromagnetica che lo investe senza rifletterla e che sia in equilibrio termico con la radiazione in essa contenuta.



Il corpo nero assorbe dunque tutta l'energia incidente e, per il principio di conservazione, reirradia totalmente la quantità assorbita, dovendo quindi il suo nome unicamente all'assenza di riflessione; possiede perciò coefficiente di emissione uguale a quello di assorbimento e pari ad uno. I corpi reali invece si discostano più o meno sensibilmente da questa definizione e sono perciò detti corpi grigi. In altri termini si può dire che tutti i corpi reali si comportano più o meno come corpi neri a meno della loro riflettività e trasmittanza. Dal punto di vista visivo, un corpo nero può essere interpretato come una cavità dotata di un orificio che permette l'ingresso di radiazione elettromagnetica ma rende molto improbabile la sua uscita dallo stesso. Questo modello costituisce un'ottima approssimazione di corpo nero: basti pensare a un contenitore in cui sia stato fatto un piccolo foro: a temperatura ambiente il foro appare assolutamente nero, ed il motivo è che la radiazione luminosa che entra nel contenitore viene diffusa molte volte al suo interno, ed è molto più probabile che alla fine venga assorbita piuttosto che riesca ad uscire dallo stesso foro da cui è entrata. In questo modo la radiazione che entra nella cavità scalda le pareti, che riemettono, a temperatura ordinaria, principalmente radiazione infrarossa. Quando viene raggiunto l'equilibrio termodinamico l'energia elettromagnetica che entra nella cavità è uguale a quella irraggiata dal foro, ma il tipo di radiazione

emesso dipende dalla temperatura della cavità. Da questo punto di vista si capisce allora che un corpo nero non è veramente nero: un oggetto come quello descritto sopra ci appare nero a temperatura ambiente perché assorbe radiazione visibile, quest'ultima viene convertita in radiazione nel dominio dell'infrarosso (a temperature ordinarie), in seguito all'assorbimento e riemissione da parte delle pareti, tali radiazioni risultando non visibile dall'occhio umano ci fanno apparire il foro come nero. Per temperature inferiori a 1000 K, lo spettro è essenzialmente tutto nella regione dell'infrarosso, successivamente comincia a comparire il visibile, a partire dal rosso, per poi includere tutte le frequenze (del visibile) fino a far apparire il corpo di color bianco. Il filamento di una lampadina a incandescenza ad esempio ha una temperatura intorno ai 3000 K, mentre la superficie del sole ha una temperatura prossima ai 6000 K.

Tuttavia, il modello del corpo nero non rappresenta unicamente un'approssimazione matematica astratta ma può essere ricondotta a molti esempi fisici concreti: ad esempio, il sole si comporta come un ottimo corpo nero. Per convincersi di ciò, consideriamo un cubo di lato 1 m e pratichiamo su di esso un piccolo foro circolare di raggio 1 mm; questo esempio riproduce in modo convincente la nostra definizione di corpo nero. Calcoliamo ora il rapporto tra la superficie del foro e il volume del cubo

$$\frac{S}{V} = \frac{\pi r^2}{L^3} = \frac{\pi \cdot 10^{-6}}{1^3} = 3.14 \cdot 10^{-6} \text{ m}^{-1}$$

Ora allo stesso modo prendiamo in esame il Sole, in cui la superficie emittente (corrispondente al foro del caso precedente) è costituita da tutta la superficie esterna della stella. Procediamo allo stesso calcolo:

$$\frac{S}{V} = \frac{4\pi r^2}{(4/3)\pi r^3} = \frac{3}{r} = \frac{3}{6.9 \cdot 10^8} \approx 10^{-8} \text{ m}^{-1}$$

siamo quindi notare un fatto piuttosto inatteso: il Sole è più adatto a esemplificare il comportamento di un corpo nero rispetto al modello stesso con cui lo abbiamo descritto. Nell'immagine riportata, si nota infatti come lo spettro emissivo del Sole in funzione della frequenza rispecchi quasi esattamente il modello del corpo nero associato a una temperatura di 6000 K.

Vediamolo un po' meglio.

Una stella o un pianeta è spesso modellato come un corpo nero e la radiazione elettromagnetica emessa da questi corpi come radiazione del corpo nero. La figura mostra una sezione trasversale molto schematica per illustrare l'idea. La fotosfera della stella, dove viene generata la luce emessa, è idealizzata come uno strato all'interno del quale i fotoni di luce interagiscono con il materiale nella fotosfera e raggiungono una temperatura comune T che si mantiene per un lungo periodo di tempo.

Alcuni fotoni sfuggono e vengono emessi nello spazio, ma l'energia che portano via viene sostituita dall'energia proveniente dall'interno della stella, cosicché la temperatura della fotosfera è quasi costante. I cambiamenti nel nucleo portano a cambiamenti nella fornitura di energia alla fotosfera, ma tali cambiamenti sono lenti (circa centomila anni) sulla scala temporale di interesse qui. Supponendo che queste circostanze possano realizzarsi, lo strato esterno della stella è in qualche modo analogo all'esempio di un involucro con un piccolo foro al suo interno, con il foro sostituito dalla trasmissione limitata nello spazio all'esterno della fotosfera. Con tutti questi presupposti, la stella emette radiazioni di corpo nero alla temperatura della fotosfera.

La teoria del Big Bang si basa sul principio cosmologico, che afferma che su larga scala l'Universo è omogeneo ed isotropo. Secondo la teoria, l'Universo circa un secondo dopo la sua formazione era un corpo nero quasi ideale in equilibrio termico a una temperatura superiore a 10^{10} K. La temperatura diminuiva man mano che l'Universo si espandeva e la materia e le radiazioni in esso contenute si raffreddavano. La radiazione cosmica di fondo a microonde osservata oggi è "il corpo nero più perfetto mai misurato in natura". Ha uno spettro di Planck quasi ideale a una temperatura di circa 2,7 K. Si discosta dall'isotropia ideale della radiazione del corpo nero solamente per una parte su centomila.

Una realizzazione pratica di un corpo che risulti nero a tutte le frequenze e temperature, che è di estrema importanza sia concettuale (per calcolarne lo spettro universale) sia empirica (per costruirlo in pratica) fu introdotto da Lummer e Wien, 1862 ed è la seguente. Si disponga di una cavità chiusa con pareti arbitrarie ma termalizzate alla temperatura T e perfettamente isolate dal mondo esterno. Si supponga di poter aprire, senza alterare l'equilibrio termico, un foro microscopico nella parete della cavità che consenta di misurare, senza alterarla, la radiazione in equilibrio alla temperatura T . Il foro in questione, visto dal di fuori, si comporta come un perfetto corpo nero. Infatti la radiazione emessa dal foro stesso sarà quella di un corpo alla temperatura T (la stessa che colpisce le pareti della cavità) mentre il foro stesso è in grado di assorbire completamente qualsiasi radiazione (tutta quella che colpisce il foro dall'esterno viene assorbita dal foro in quanto entra dalla cavità senza più uscirne) un po' come fa il portone di una casa che, anche in pieno giorno, appare nero! Ovviamente più sarà piccolo il rapporto tra superficie del foro e volume della cavità e più ideale sarà il comportamento di corpo nero del foro. Quindi è il foro che si comporta da corpo nero non le pareti della cavità (anche se il ruolo delle pareti è essenziale perché è a furia di rimbalzare tra le pareti della cavità che la radiazione verrà prima o poi termalizzata).

Introduciamo alcune grandezze preliminari per lo studio del corpo nero.

Iniziamo con l'osservare che lo spettro può essere descritto come sia come intensità della radiazione emessa da una superficie che come densità dell'energia contenuta in una cavità risonante.

Dunque si definisce *potere emissivo specifico* (o intensità specifica) l'energia emessa da un corpo alla temperatura T, per unità di tempo, per unità di superficie e per unità di frequenza:

$$e(\nu, T) \equiv I_\nu \equiv \frac{dI}{d\nu} = \frac{dE}{dt dS d\nu} \text{ (W / m}^2\text{s}^{-1}\text{)}$$

Per studiare l'assorbimento dei corpi, invece, si introduce la funzione *potere assorbente*, denotata con $a(\nu, T)$. Questa è definita, per ogni temperatura del corpo, come la frazione assorbita dell'energia incidente alla frequenza ν . Si noti che questa funzione, a differenza della $e(\nu, T)$ è adimensionale.

$$a(\nu, T) = \frac{E_{\text{incidente}}}{E_{\text{assorbita}}}$$

Il potere emissivo, come il potere assorbente, è una caratteristica del corpo considerato. Esisteranno corpi che hanno una grande capacità di emettere radiazioni e corpi che ne hanno meno. Ma applicando la seconda legge della termodinamica nel 1860 Kirchhoff scopre una legge generale: mentre il potere emissivo e il potere assorbente cambiano da corpo a corpo il rapporto tra i due è una funzione universale dipendente solo dalla temperatura e dalla frequenza considerata, cioè

$$\frac{e(\nu, T)}{a(\nu, T)} = f(\nu, T)$$

Ci si pose dunque il problema di capire cosa fosse questa funzione universale, Kirchhoff osserva che se si considera un corpo con potere assorbente uguale a 1 si ha che $e(\nu, T)$ prende il suo valore massimo ed inoltre che in quel caso la funzione universale cercata è proprio il potere emissivo.

$$\frac{e(\nu, T)}{1} = f(\nu, T) \Rightarrow e(\nu, T) = f(\nu, T)$$

Con semplici considerazioni dimostreremo che l'emittanza specifica del foro $e(\nu, T)$ può essere espressa in termini della densità di energia delle onde elettromagnetiche all'interno della cavità $u(\nu, T)$ (energia per unità di volume per intervallo unitario di frequenza). Si ottiene infatti che, per una cavità chiusa di forma qualsiasi, l'energia incidente per unità di superficie sulle pareti al suo interno

è data da $(c/4) u(\nu, T)$, dove c è la velocità della luce. Immaginando quindi di aprire un foro microscopico nelle pareti della cavità stessa, questo foro, visto da fuori, avrà un'emissività data proprio da $(c/4) u(\nu, T)$. Poiché abbiamo visto che il foro si comporta come un corpo nero perfetto, avremo che l'emissività di un corpo nero è data da (Kirchoff 1859):

$$e(\nu, T) = \frac{c}{4} u(\nu, T)$$

In altre parole l'emissività di un corpo nero alla temperatura T è proporzionale, frequenza per frequenza, alla densità di energia della radiazione di cavità (per una qualsiasi cavità) purché con pareti isolate e portate tutte alla stessa temperatura T .

Dimostrazione.

Partiamo dal proposito di voler calcolare l'energia che incide su una superficie unitaria perpendicolare all'asse z per unità di tempo, ossia la potenza per unità di superficie (intensità). A tal fine indichiamo con $u(\theta)$ la densità di energia delle onde che si propagano nella direzione definita dall'angolo θ (tralasciamo per semplicità di scrittura la dipendenza da ν e da T).

Integrando in coordinate polari si ha

$$\int du(\theta) \equiv u = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} u(\theta) \sin\theta d\theta$$

Dove u è la densità di energia totale. Se non ci sono direzioni preferenziali $u(\theta)$ sarà costante e potremo assumere,

$$u(\theta) = \frac{u}{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta} = \frac{u}{4\pi}$$

Possiamo allora calcolare l'energia che incide su una superficie unitaria perpendicolare all'asse z per unità di tempo dovuta alle sole onde che si propagano in una data direzione θ (e φ qualsiasi) come

$$\frac{dP(\theta)}{dS} = \frac{dE(\theta)}{dt dS} = \frac{dE(\theta)}{dV} c_z = u(\theta) c \cos\theta$$

Dove c è la velocità della luce (evidentemente la componente lungo z di c è proprio c , essendo un invariante). Integrando la potenza per unità di superficie sul semispazio delle direzioni consentite (tutte le direzioni di propagazione in direzione positiva dell'asse z) avremo

$$\frac{dP}{dS} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \frac{dP(\theta)}{dS} \sin\theta d\theta = cu \frac{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta d\theta}{4\pi} = cu \frac{2\pi(1/2)}{4\pi} = \frac{c}{4}u$$

In pratica il fattore $1/2$ al numeratore rispecchia il fatto che le onde stazionarie presenti nella cavità sono rappresentabili come onde viaggianti con direzione opposte, quindi solo metà dell'energia di un'onda stazionaria può viaggiare verso un dato elemento di superficie. Avremo quindi che l'energia incidente per unità di superficie e per unità di tempo è data da

$$\frac{dP}{dS} = \frac{c}{4}u$$

Se al posto dell'elemento di superficie sostituiamo il foro della cavità, la radiazione che vi incide è

$$e = \frac{c}{4}u \text{ (W / m}^2\text{)}$$

proprio quella emessa dal foro per cui l'emissività del foro deve valere:

Reintroducendo la dipendenza da ν , ossia considerando la potenza specifica si ha

$$e(\nu, T) = \frac{c}{4} u(\nu, T) \text{ (W / m}^2\text{s}^{-1}\text{)} \quad \text{c.v.d.}$$

Che rappresenta quindi l'energia emessa da un corpo nero alla temperatura T , per unità di superficie, per unità di tempo e per unità di frequenza in tutte le direzioni.

Dimostrazione alternativa.

Si può partire anche considerando la densità di energia radiante (specifica) all'interno della cavità $u(\nu) = du/d\nu$. Consideriamo dunque la funzione $u(\nu, T)$ tale che $u(\nu, T) d\nu$ indica la quantità di energia posseduta dal campo elettromagnetico contenuto nell'unità di volume della cavità, ed avente frequenza compresa fra ν e $\nu + d\nu$: cioè

$$u(\nu, T) = \frac{du}{d\nu} \text{ (J / m}^3\text{s}^{-1}\text{)}; \quad \text{densità di energia per unità di frequenza}$$

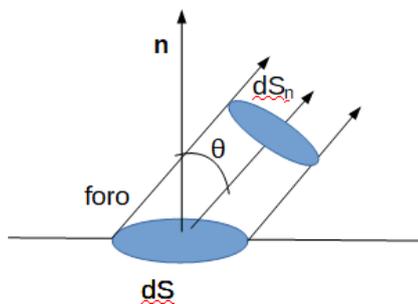
$$u(\nu, T) d\nu = du = \frac{\text{energia della radiazione avente frequenza compresa fra } \nu \text{ e } \nu + d\nu}{\text{unità di volume}} \quad (\text{J} / \text{m}^3)$$

Intanto si può affermare che la radiazione all'interno della cavità deve essere uniforme ed isotropa, altrimenti potrebbe realizzarsi un trasferimento spontaneo di energia da un punto all'altro, cosa impossibile se i punti sono alla stessa temperatura (come abbiamo ipotizzato).

Consideriamo dunque la radiazione emergente dal foro con superficie elementare dS . Poiché internamente alla cavità la radiazione si muove isotropicamente con velocità c , la potenza emessa nell'intervallo di frequenza $d\nu$ entro l'angolo solido $d\Omega$ intorno alla direzione θ rispetto alla normale \mathbf{n} al foro, vale evidentemente:

$$\frac{d^2W}{d\Omega d\nu} = du \cdot dS \cdot c \cdot \frac{d\Omega}{4\pi}$$

Essa è infatti uguale alla densità di energia du (relativa all'intervallo $d\nu$) moltiplicata per il volume di un cilindro di base dS_n ed altezza c , e per il rapporto dell'angolo solido elementare $d\Omega$ rispetto all'angolo solido totale 4π , come si vede dalla seguente illustrazione.



Tenuto conto che $dS_n = dS \cos\theta$ e $du = u(\nu)d\nu$, l'intensità differenziale angolare o potere emissivo differenziale angolare (potenza per unità di superficie, nell'intervallo di frequenza $d\nu$, e per unità di angolo solido) vale:

$$\frac{d^2I}{d\Omega d\nu} = \frac{d^2(P/S)}{d\Omega d\nu} = \frac{1}{dS} \frac{d^2P}{d\Omega d\nu} = c \frac{u(\nu)}{4\pi} \cos\theta d\Omega d\nu$$

Integrando questa espressione rispetto a $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$ (tenuto conto che l'integrale su θ vale $\frac{1}{2}$, mentre quello su ϕ vale 2π) si ottiene il potere emissivo, ossia l'intensità per unità di frequenza $dI/d\nu$ emessa sull'angolo solido del corpo nero:

$$e(\nu) d\nu \equiv \frac{dI}{d\nu} d\nu = \frac{c}{4} u(\nu) d\nu$$

(N.B. Data la seguente uguaglianza di funzioni reali A(x) e B(x)

$$A(x) dx = B(x) dx ; [A(x) - B(x)] dx = 0$$

Esse risulteranno senz'altro uguali, dovendo essere A(x) = B(x) al fine di verificare l'uguaglianza).

Dunque si ha la seguente importante relazione che lega l'intensità specifica alla densità di energia specifica:

$$\varepsilon(\nu, T) \equiv I_\nu = \frac{c}{4} u(\nu, T)$$

Verifichiamo che dimensionalmente la relazione è corretta

$$\varepsilon(\nu, T) \equiv \frac{W}{m^2 s^{-1}} = \frac{c}{4} f(\nu, T) \equiv \frac{m}{s} \frac{J}{m^3 s^{-1}} = \frac{J}{s} \frac{1}{m^2 s^{-1}} = \frac{W}{m^2 s^{-1}}$$

Quindi tutto lo studio dello spettro del corpo nero consiste nell'identificare la funzione universale u(ν,T).

3 Leggi di Wien e di Stefan-Boltzmann

Si definisce inoltre potere emissivo totale (o intensità totale) l'energia emessa da un corpo nero alla temperatura T, per unità di superficie, per unità di tempo, su tutte le frequenze

$$\varepsilon_{TOT} \equiv I_{TOT} = \int_0^{\infty} \varepsilon(\nu, T) d\nu$$

Nel 1879 Josef Stefan scoprì sperimentalmente che l'intensità totale era proporzionale alla quarta potenza della temperatura e nel 1884 Ludwig Boltzmann la derivò per via teorica (usando l'elettromagnetismo classico e la termodinamica), in loro onore la costante di proporzionalità viene chiamata costante di Stefan-Boltzmann; quindi si ha

$$\varepsilon_{TOT} = \int_0^{\infty} \varepsilon(\nu, T) d\nu = \sigma T^4 \quad (W / m^2)$$

$$\sigma = \frac{\pi^2 k^4}{60 \lambda^3 c^2} = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ Wm}^{-2} \text{ K}^{-4}$$

Lo spettro del corpo nero è uno spettro continuo (cioè assume valori su tutte gli infiniti valori reali delle frequenze) con la tipica forma a "campana" dove il picco di emissione è la lunghezza d'onda a cui corrisponde la massima emissione (massima intensità) della radiazione emessa. Un primo importante risultato venne ottenuto nel 1893 dal giovane fisico austriaco Wien.

1° Legge di Wien (1893)

Da considerazioni teoriche, combinando termodinamica ed elettromagnetismo, riguardanti la radiazione chiusa in una cavità perfettamente assorbente (corpo nero) soggetta ad una compressione adiabatica (termodinamica più effetto doppler) Wilhem Wien ricavò la seguente espressione

$$u(\nu, T) \propto \nu^3 F\left(\frac{\nu}{T}\right)$$

Questa legge contiene implicitamente la legge di Stefan-Boltzmann, infatti integrando su tutte le frequenze si ha

$$I = \frac{c}{4} \int_0^{\infty} u(\nu, T) d\nu \propto \frac{c}{4} \int_0^{\infty} \nu^3 F\left(\frac{\nu}{T}\right) d\nu = \frac{c}{4} T^4 \int_0^{\infty} x^3 F(x) dx = \text{cost} \cdot T^4$$

La proporzionalità deriva dal fatto che l'integrale è stato reso indipendente da T. La costante di proporzionalità potrà essere calcolata solo conoscendo esplicitamente la legge di emissività.

2° Legge di Wien (o legge dello spostamento di Wien) (1899)

Si notò che il picco di emissione è quello che caratterizza il colore di cui appare il corpo se scaldato a quella temperatura. Aumentando la temperatura il picco di emissione si sposta verso una lunghezza d'onda più piccola. Wien scoprì che il prodotto della lunghezza d'onda corrispondente al picco di emissione per la temperatura assoluta del corpo è sempre una costante.

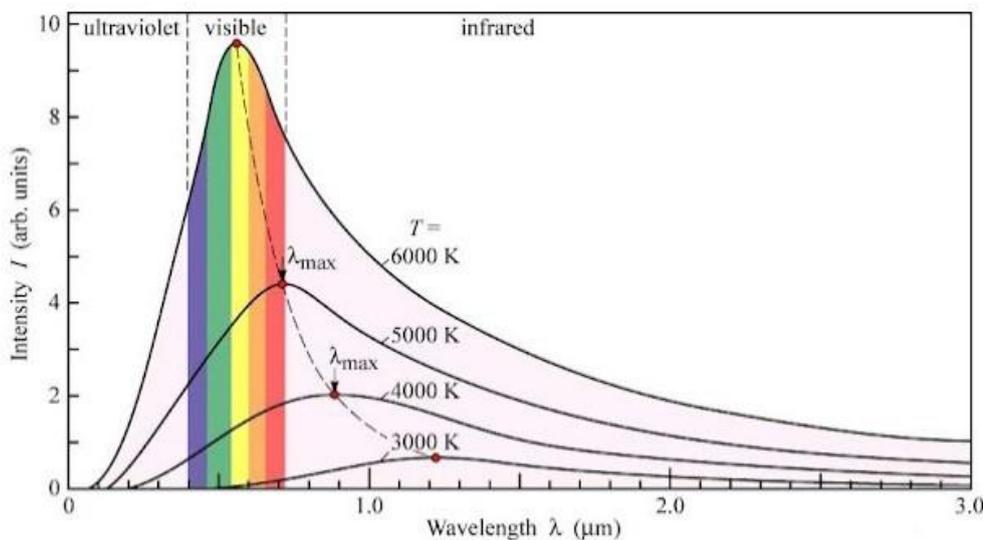
La legge dello spostamento di Wien si scrive pertanto: $\lambda_{\max} \cdot T = \text{cost.}$ ossia $\lambda_{\max} = \frac{\text{cost.}}{T}$

Quindi la lunghezza d'onda di picco risulta inversamente proporzionale alla temperatura.

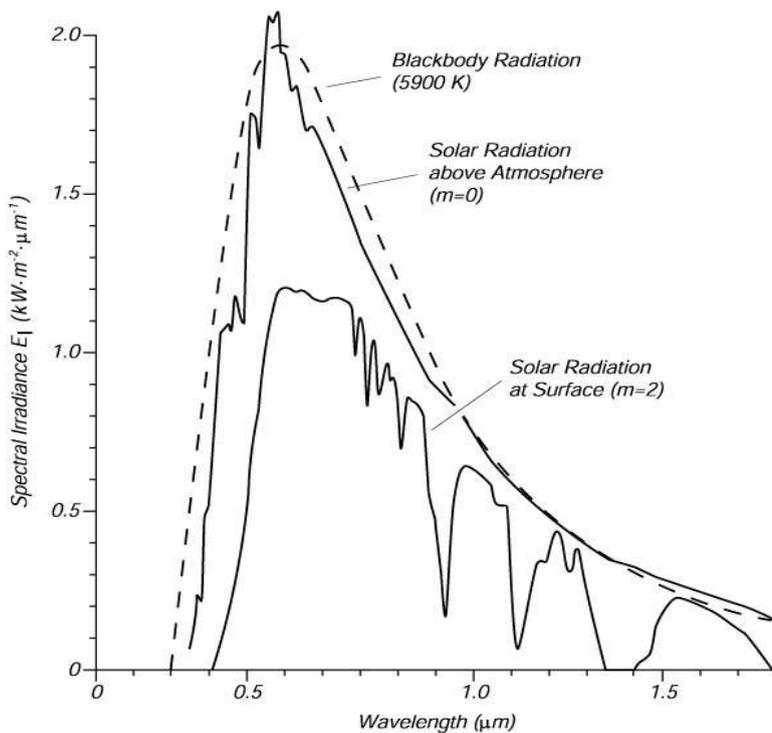
Numericamente si è trovato che la costante vale $2.89 \cdot 10^{-3}$ mK, dunque si ha;

$$\lambda_{\max} = \frac{2.898 \cdot 10^{-3}}{T} (m)$$

Tramite questa legge è possibile determinare la lunghezza d'onda di picco di qualunque corpo nero ad una certa temperatura (vedi illustrazione seguente). Se si pensasse di passare alla relazione per la frequenza usando la relazione $c = \lambda \nu$ si incapperebbe in un "fatal error", come discusso più avanti.



Qui sotto invece è rappresentato il grafico del corpo nero ideale, quello reale solare al di sopra dell'atmosfera e di quello che arriva al suolo.



La posizione dei massimi e la visibilità dei corpi

	<p>corpo umano $T = 37^\circ \text{C} = 310 \text{ K}$</p>	<p>$\lambda_{\text{max}} = 9 \mu\text{m}$ infrarosso</p>
	<p>lampada a incandescenza $T = 3000 \text{ K}$</p>	<p>$\lambda_{\text{max}} = 1 \mu\text{m}$ infrarosso</p>
	<p>Sole $T = 5780 \text{ K}$</p>	<p>$\lambda_{\text{max}} = 0,5 \mu\text{m}$ visibile</p>
	<p>stella $T = 30000 \text{ K}$</p>	<p>$\lambda_{\text{max}} = 1000 \text{ \AA}$ ultravioletto</p>

Viceversa dal colore emesso dal corpo nero (cioè dalla frequenza corrispondente) si può dedurre la sua temperatura. Ad esempio dal colore del Sole si può dedurre il picco di emissione (la frequenza del giallo/rosso) e quindi la sua temperatura di circa 5780 K.

Dallo spettro risultava anche evidente che al crescere della temperatura aumenta la quantità dell'energia irradiata che corrisponde all'area sottesa al grafico della "campana".

Lo spettro del corpo nero è quindi uno spettro continuo (cioè assume valori su tutte gli infiniti valori reali delle frequenze) con la tipica forma, come già detto, a "campana" dove il picco di emissione è determinato dalla legge di Wien.

Come si nota dal grafico più è bassa la temperatura più è alta la lunghezza d'onda del massimo della radiazione, senza nessun limite, se non lo zero assoluto, che non può essere raggiunto per il terzo principio della termodinamica. Un corpo nero può benissimo emettere ad esempio onde radio, con lunghezza d'onda da un 1 cm, se la sua temperatura è di 0,3 K, o raggi gamma, con lunghezza d'onda di 1 pm, se la sua temperatura è di 3 miliardi di gradi.

A tal proposito si veda quanto detto dell'osservazione finale di questo articolo.

Per avere una idea delle temperature presenti nel cosmo diciamo che il nucleo di una stella "media" come il nostro Sole, arriva a 15 milioni di gradi, (la temperatura più alta "prodotta" dall'uomo è quella necessaria per l'innesco di una bomba H, circa 300 milioni di gradi, che si ottiene facendo esplodere al centro della massa della bomba H una bomba a fissione, mentre negli esperimenti sulla fusione controllata di tipo tokamak ST40 nel 2022, si è raggiunta una temperatura di 100 milioni di gradi); stelle più massicce di quelle "medie" hanno temperature nel nucleo di 600 milioni di gradi, ma le temperature più alte nel cosmo si raggiungono nei nuclei delle Supernove, dove si arriva ad alcuni miliardi di gradi.

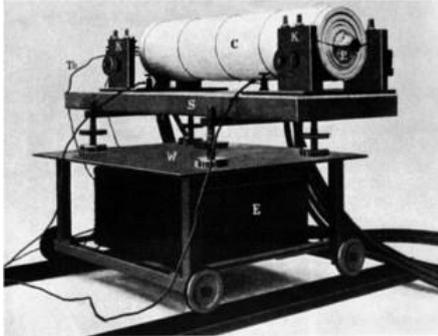
Gustav Kirchhoff stabilisce che a parità di frequenza e temperatura, materiali diversi si comportano in modo simile. Viene dunque ipotizzato che la radiazione di corpo nero sia una proprietà indipendente dalle proprietà del contenitore, e dunque di interesse generale.

Il termine ed il concetto di corpo nero, furono introdotti per la prima volta proprio da Kirchhoff nel 1860. In particolare, egli dimostrò che il rapporto tra potere emissivo e potere assorbente di un corpo, definisce una funzione che dipende esclusivamente dalla frequenza e dalla temperatura e per questo detta funzione universale $u(\nu, T)$ che risulta quindi indipendente dalla natura e dalla forma dei corpi:

$$\frac{e(\nu, T)}{a(\nu, T)} = u(\nu, T)$$

La funzione $u(\nu, T)$ deve essere una funzione universale di T e ν (indipendente cioè da come è fatta la cavità: forma, materiali ecc....), altrimenti si violerebbe il secondo principio della termodinamica. Infatti se così non fosse, tra due cavità in contatto ottico (con un filtro F selettivo alla frequenza ν_0), inizialmente alla stessa T , ci sarebbe flusso di calore verso la cavità dove $u(\nu_0, T)$ è minore. Questo provocherebbe un riscaldamento di questa cavità, col che saremmo riusciti a spostare calore da un corpo più freddo ad uno più caldo come unico risultato di una trasformazione.

Kirchhoff, poi, definì corpo nero un corpo il cui potere assorbente è pari a 1, per ogni temperatura e frequenza. Da ciò segue che, la funzione universale $u(\nu, T)$ descrive proprio il potere emissivo di un corpo nero.



*Der electricch geblähte „absolut schwarze“ Körper
und seine Temperaturmessung;
von O. Lummer und F. Kurlbaum.
(Vorgängen in der Sitzung vom 6. Mai 1898.)*

Apparato sperimentale di un corpo nero utilizzato da Lummer e Kurlbaum del 1898 costituito da un foglio di platino all'interno di un tubo di ceramica.

4 La formula di Rayleigh-Jeans

Al fine di determinare la forma della funzione universale, si possono percorrere due strade. La prima si basa sul principio di equipartizione dell'energia: si considera la radiazione presente all'interno della cavità (per unità di volume) e poi si valuta il numero dei gradi di libertà posseduta dalla radiazione avente frequenza compresa fra ν e $\nu + d\nu$, assegnando ad ogni grado di libertà un'energia cinetica pari a $\frac{1}{2} kBT$; questo metodo consentirà una immediata generalizzazione al caso quantistico. La seconda suppone che le molecole delle pareti si comportino come dipoli oscillanti (ovvero che dentro la cavità sia contenuto un sistema di dipoli oscillanti) e calcolare lo spettro dalla condizione che all'equilibrio ogni dipolo emetta ad ogni frequenza tanta energia quanta ne assorbe.

Calcolo basato sul principio di equipartizione dell'energia

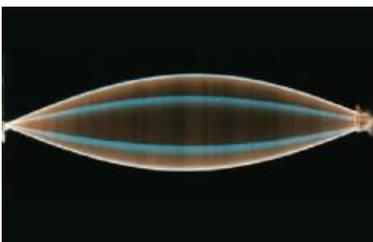
Descriviamo dapprima l'approccio classico di Rayleigh e Jeans. Si considera il corpo nero come una cavità, le cui pareti sono formate da oscillatori armonici, la *densità di energia* (J/m^3) in essa contenuta $u(\nu)$, nell'intervallo di frequenza compreso tra ν e $\nu + d\nu$, è

$$u(\nu) d\nu = \epsilon_{ave} N(\nu) d\nu$$

dove ϵ_{ave} rappresenta l'energia media degli oscillatori delle pareti della cavità, in risonanza con la frequenza ν e $N(\nu)d\nu$ è il numero dei modi di oscillazione delle onde stazionarie (per unità di volume) tra ν e $\nu + d\nu$ all'interno della cavità, che si assume di forma cubica di lato L .

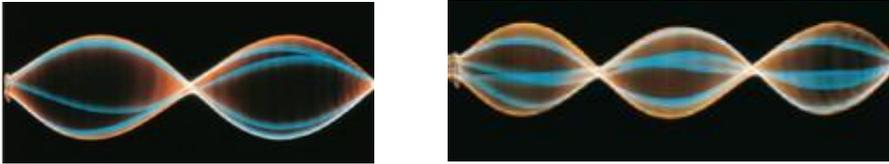
Piccola scheda sul significato di modi di oscillazione di un'onda stazionaria.

Pensiamo per esemplificare ad una corda di chitarra pizzicata al suo centro, si ottiene un moto come quello mostrato nella figura seguente.



Questa onda stazionaria ha sempre due punti fissi – detti nodi – che sono posizionati alle estremità della corda; tutti gli altri punti della corda si muovono ognuno di moto armonico in su e in giù lungo l'asse y (verticale), e rimanendo sempre nello stesso punto dell'asse x (orizzontale). Inoltre hanno

tutti la stessa frequenza e si muovono in fase, cioè raggiungono insieme sia il punto di massimo della propria oscillazione che di minimo. Pizzicando opportunamente la corda si ottengono altre modalità di oscillazione aventi un numero di nodi maggiore di quello fondamentale precedente. Per esempio si possono ottenere le seguenti situazioni:



La prima ha tre nodi, mentre la seconda ha quattro nodi. Ciascuna di queste particolari onde rappresenta un modo normale di oscillazione della corda.

Def. Si chiamano modi normali di oscillazione le onde stazionarie in cui tutti i punti della corda oscillano di moto armonico con la stessa frequenza.

Questa definizione è valida per tutti i tipi di onde, e si estende immediatamente al caso delle onde elettromagnetiche ove si sostituisca la parola corda con quella di campo (elettrico e magnetico).

Affinché si instaurino onde stazionarie, bisogna richiedere che queste abbiano nodi alle estremità del cubo e, quindi, che nelle tre direzioni devono essere contenute un numero intero di semi-lunghezze d'onda:

$$n_x = \frac{2L}{\lambda}, \quad n_x = 1, 2, 3, \dots$$

$$n_y = \frac{2L}{\lambda}, \quad n_y = 1, 2, 3, \dots$$

$$n_z = \frac{2L}{\lambda}, \quad n_z = 1, 2, 3, \dots$$

Ogni terna $(n_x; n_y; n_z)$ corrisponde ad un possibile modo di un'onda stazionaria nella cavità. Perciò, possiamo considerare lo spazio tridimensionale degli interi $(n_x; n_y; n_z)$, in cui ogni punto è posto in corrispondenza biunivoca con un'onda stazionaria permessa. Il numero di onde stazionarie permesse nell'intervallo di lunghezza d'onda $[\lambda; \lambda + d\lambda]$, quindi, è uguale al numero di punti, a coordinate intere, nell'ottante positivo del guscio sferico compreso tra n e $n + dn$, con

$$n = (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)^{1/2}$$

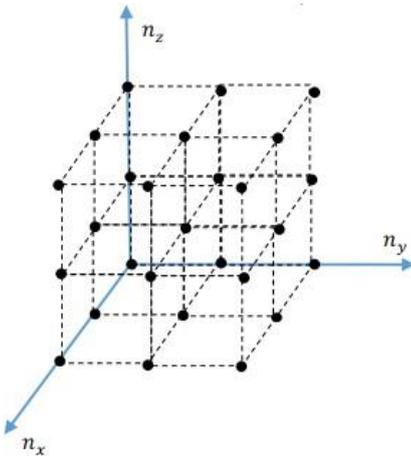


Fig. 1

Dal momento che il numero di modi è molto grande, lo spazio può essere considerato come continuo, perciò, il numero di punti a coordinate intere, nell'ottante positivo del guscio sferico, ben approssima il volume del guscio.

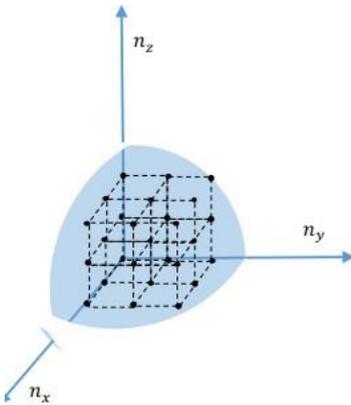


Fig. 2

Da ciò segue che il numero di onde stazionarie permesse è

$$dN = 2 \frac{1}{8} 4\pi n^2 dn$$

dove il fattore 2 tiene conto dei due possibili stati di polarizzazione delle onde. Ricordando che

$$n = \frac{2L}{\lambda} = \frac{2Lv}{c} \quad dn = \frac{2L}{c} dv$$

si ha

$$N(\nu) d\nu = \frac{8\pi L^3}{c^3} \nu^2 d\nu$$

La densità dei modi vibrazionali permessi si ottiene dividendo l'espressione precedente per il volume della cavità, ottenendo

$$N(\nu) d\nu = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 d\nu$$

Adesso non rimane che calcolare l'energia media degli oscillatori, a tal fine viene utilizzata la distribuzione di Boltzmann che afferma che la probabilità che un oscillatore abbia energia compresa fra ϵ e $\epsilon + d\epsilon$ è

$$f(\epsilon) = C e^{-\beta\epsilon}$$

dove C è una opportuna costante e $\beta = 1/k_B T$ con k_B costante di Boltzmann, da ciò segue che il valor medio dell'energia è

$$\epsilon_{ave} = \frac{\int_0^{\infty} \epsilon f(\epsilon) d\epsilon}{\int_0^{\infty} f(\epsilon) d\epsilon}$$

Per cui sostituendo l'espressione della funzione nella precedente si ha

$$\epsilon_{ave} = \frac{\int_0^{\infty} \epsilon e^{-\beta\epsilon} d\epsilon}{\int_0^{\infty} e^{-\beta\epsilon} d\epsilon}$$

Ricordando che la seguente proprietà matematica:

$$\frac{d}{dx} \log(f(x)) = \frac{1}{f(x)} f'(x)$$

si ha che

$$\begin{aligned} -\frac{d}{d\beta} \log \left[\int_0^{\infty} e^{-\beta\epsilon} d\epsilon \right] &= -\frac{1}{\int_0^{\infty} e^{-\beta\epsilon} d\epsilon} \frac{d}{d\beta} \int_0^{\infty} e^{-\beta\epsilon} d\epsilon = -\frac{1}{\int_0^{\infty} e^{-\beta\epsilon} d\epsilon} \int_0^{\infty} \frac{d}{d\beta} e^{-\beta\epsilon} d\epsilon = \\ &= -\frac{\int_0^{\infty} -\epsilon e^{-\beta\epsilon} d\epsilon}{\int_0^{\infty} e^{-\beta\epsilon} d\epsilon} = \frac{\int_0^{\infty} \epsilon e^{-\beta\epsilon} d\epsilon}{\int_0^{\infty} e^{-\beta\epsilon} d\epsilon} = \epsilon_{ave} \end{aligned}$$

Dunque sfruttando questa uguaglianza possiamo scrivere

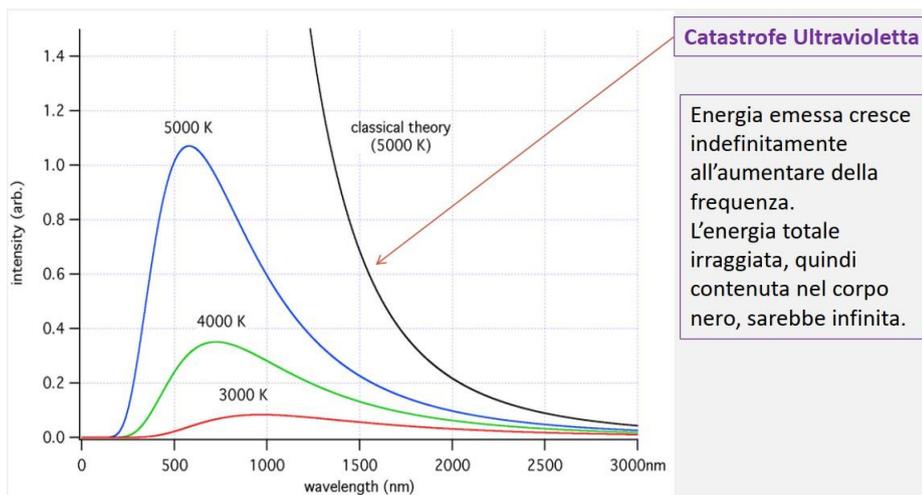
$$\varepsilon_{ave} = - \frac{d}{d\beta} \log \left[\int_0^{\infty} e^{-\beta\varepsilon} d\varepsilon \right] = - \frac{d}{d\beta} \log \left[-\frac{1}{\beta} e^{-\beta\varepsilon} \right]_{\beta}^{\infty} = - \frac{d}{d\beta} \log \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\beta} = k_B T$$

Questo risultato è noto come teorema dell'equipartizione dell'energia. Siamo ora in grado di scrivere il risultato del nostro calcolo noto come formula di Rayleigh-Jeans che descrive l'andamento della densità (spettrale) dell'energia

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi}{c^3} k_B T \nu^2$$

Dove si è introdotta la variabile temperatura nello scrivere la densità di energia, perché dal calcolo dell'energia media degli oscillatori è venuto fuori che essa dipende anche da T, quindi la densità di energia dipende in effetti a due variabili: frequenza e temperatura. Come si vedrà più avanti la stessa radiazione presente nella cavità potrà essere immaginata come composta da un insieme di "oscillatori".

Questa legge risulta in accordo con i risultati sperimentali per grandi lunghezze d' onda (o basse frequenze), mentre si discosta completamente per piccole lunghezze d' onda (o alte frequenze). La formula, infatti, prevede una densità di energia infinita per la frequenza che tende ad infinito e, quindi, emissioni altissime per lunghezze d'onda corrispondenti all' ultravioletto e ai raggi X. Questo problema, noto come "catastrofe ultravioletta", (vedi figura seguente) fu risolto da Planck nel 1900.



La prima parte del calcolo poteva svolgersi anche nel seguente modo.

Pensiamo alla cavità di forma cubica avente lato $L = 2a$

Le onde elettromagnetiche devono essere stazionarie e se pensiamo in una sola dimensione la condizione da imporre è

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} = \frac{2 \cdot 2a}{n} = \frac{4a}{n} \quad (n=1,2,3,\dots)$$

Ora anziché ragionare in termini della frequenza utilizziamo la pulsazione dove $\omega = 2\pi\nu$

ma d'altronde la velocità dell'onda è legata alla frequenza ed alla lunghezza d'onda tramite la seguente relazione $c = \nu \lambda$, quindi possiamo mettere in relazione la frequenza e con la lunghezza d'onda $\nu = c/\lambda$ ed inserendo la relazione precedente in questa relazione abbiamo i valori permessi della frequenza (che sono infiniti)

$$\nu_n = \frac{c}{4a} n \quad (n=1,2,3,\dots) \quad (1)$$

Per passare al caso tridimensionale consideriamo un'onda diretta lungo l'asse x – pensiamo agli assi orientati lungo tre spigoli del cubo – sia $\mathbf{E}(x,t)$ il suo campo elettrico. L'onda avrà due stati di polarizzazione lungo y oppure lungo z , ma per ora consideriamo un solo stato, ad esempio lungo y , poi alla fine quando faremo il conto del numero dei gradi di libertà moltiplicheremo per 2. Dunque le condizioni al contorno impongono che sia $E_y = 0$ (ed anche $E_z = 0$) per $x = 0$ e per $x = 2a$.

L'onda può allora essere scritta come prodotto di una parte spaziale ed una temporale

$$E_y(x,t) = E_{0y} \sin(kx) \sin(\omega t) ; \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (1')$$

Per soddisfare le condizioni al contorno l'onda deve annullarsi oltre che per $x = 0$ (cosa garantita dal fattore $\sin(kx)$), anche per $x = 2a$ e ciò comporta che sia

$$k(2a) = n\pi ; \quad \frac{2\pi}{\lambda} (2a) = n\pi$$

$$\lambda_n = \frac{4a}{n} \quad (n=1,2,3,\dots) \quad (2)$$

In generale per un'onda orientata in direzione qualunque, scelto lo stato di polarizzazione, potremo scrivere le sue componenti secondo le diverse direzioni di vibrazione nella forma

$$\begin{aligned} E_y(x,t) &= E_{0y} \sin(k_x x) \sin(\omega t) & k_x &= \frac{2\pi}{\lambda} \cos\alpha \\ E_z(y,t) &= E_{0z} \sin(k_y y) \sin(\omega t) & k_y &= \frac{2\pi}{\lambda} \cos\beta \\ E_x(z,t) &= E_{0x} \sin(k_z z) \sin(\omega t) & k_z &= \frac{2\pi}{\lambda} \cos\gamma \end{aligned}$$

dove i tre coseni sono i coseni direttori del vettore d'onda \mathbf{k} secondo i tre angoli che esso forma con gli assi. Le condizioni al contorno impongono che sia

$$\begin{aligned} k_x(2a) = n_1\pi & \quad (4a/\lambda) \cos\alpha = n_1 & \quad n_1 = 1, 2, 3, \dots \\ k_y(2a) = n_2\pi & \rightarrow (4a/\lambda) \cos\beta = n_2 & \quad n_2 = 1, 2, 3, \dots \\ k_z(2a) = n_3\pi & \quad (4a/\lambda) \cos\gamma = n_3 & \quad n_3 = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Quadrando e sommando otteniamo la condizione che deve essere soddisfatta da λ per garantire le richieste condizioni al contorno

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = (4a/\lambda)^2 (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) = \frac{16a^2}{\lambda_n^2}$$

$$\lambda_n = \frac{4a}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} \quad (3)$$

Che rappresenta l'estensione tridimensionale della (2).

Tenuto conto che $\lambda v = c$, per la frequenza si ha

$$v_n = \frac{c}{\lambda_n} = \frac{c}{4a} \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2} \quad (4)$$

Che rappresenta l'estensione tridimensionale della (2).

Da ciò segue che se \mathbf{r} è il vettore posizione nello spazio delle fasi che individua in coordinate cartesiane i numeri interi positivi n_1, n_2, n_3 , - cioè $r = (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)^{1/2}$ (5) - i modi di vibrazione permessi per la radiazione sono rappresentati dai punti posti ai vertici del reticolo con coordinate intere positive, cioè giacenti nell'ottante positivo. Si nota che la densità dei punti reticolari è di un punto per unità di volume (ogni celletta cubica condivide con i suoi vicini 8 vertici (punti)), per cui il numero $N(r) dr$ dei modi di vibrazione corrispondenti ad un valore di r compreso fra r e $r + dr$ è pari semplicemente al volume della porzione di guscio sferico di raggio r e spessore dr contenuta nel primo ottante, cioè si ha (si vedano le figure (1) e (2) precedenti):

$$N(r) dr = \frac{\pi}{2} r^2 dr$$

Tenendo conto della (5) la (4) può essere scritta nel seguente modo $v_n = \frac{c}{4a} r$

da cui differenziando $dv = \frac{c}{4a} dr$

quindi il numero dei modi di vibrazioni permessi, contenuti dell'intervallo di frequenza fra ν e $\nu + d\nu$ è

$$N(\nu) d\nu = \frac{\pi}{2} \left(\frac{4a}{c} \right)^3 \nu^2 d\nu$$

Ricordando che il volume della cavità è $V = (2a)^3$

$$N(\nu) d\nu = \frac{8\pi V}{2 c^3} \nu^2 d\nu = \frac{4\pi}{c^3} V \nu^2 d\nu$$

Ed infine occorre dividere per V in modo da riferirsi all'unità di volume e moltiplicare per 2 ricordandosi dei due modi possibili della polarizzazione: in definitiva otteniamo per la densità dei modi vibrazionali permessi

$$N(\nu) d\nu = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 d\nu \quad (6)$$

Per completare il discorso occorre moltiplicare questo valore per l'energia media assegnata ad ogni grado di libertà dal principio di equipartizione dell'energia, che in questo caso trattandosi di oscillazioni oltre al contributo $\frac{1}{2}kT$ dovuto all'energia cinetica occorre sommare anche il contributo $\frac{1}{2}k_B T$ dovuto all'energia potenziale. In definitiva otteniamo per la **densità di spettrale dell'energia** quella che è nota come formula di **Rayleigh-Jeans**:

$$du = f(\nu) d\nu = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 k_B T d\nu$$

ossia:

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 k_B T \quad (7)$$

Oppure richiamando la formula del potere emissivo si ha

$$\varepsilon(\nu) = \frac{c}{4} f(\nu) d\nu = \frac{2\pi}{c^2} k_B T \nu^2 d\nu \quad (7')$$

Per ottenere la radiazione totale emessa dal corpo nero occorre integrare l'espressione precedente:

$$I_{totale} = \int_0^{\infty} \varepsilon(\nu) d\nu = \int_0^{\infty} \frac{2\pi}{c^2} \nu^2 k_B T d\nu = \frac{2\pi}{c^2} k_B T \int_0^{\infty} \nu^2 d\nu = \infty$$

Come si vede la funzione universale trovata basandosi sulla fisica classica porta ad un risultato assurdo, una intensità infinitamente grande (catastrofe ultravioletta).

Calcolo basato sul modello degli oscillatori

Se si fa il vuoto in un recipiente (cavità) a pareti opache, all'interno di esso resta soltanto la radiazione elettromagnetica creata dalla agitazione termica degli atomi delle pareti questa radiazione devono soddisfare le equazioni di Maxwell dell'elettromagnetismo classico. In particolare il campo elettrico deve soddisfare le equazioni

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0; \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (8)$$

dove $c^2 = 1/(\epsilon_0 \mu_0)$

Una volta trovato il campo elettrico, il campo magnetico si ottiene direttamente dalla relazione

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mu_0 - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (9)$$

E' sufficiente quindi risolvere solo la (8).

Siccome la radiazione è confinata in un volume V finito, il campo elettrico deve soddisfare oltre la (1) anche le condizioni al contorno imposte dalle pareti della cavità. Sfruttando il fatto che la funzione universale deve essere indipendente dal materiale della cavità scegliamo per semplicità le pareti conduttrici in modo che la componente parallela di \mathbf{E} e la componente normale di \mathbf{B} alla superficie risultino nulle.

Ricordando la (1') si nota che il campo può essere espresso come prodotto di due funzioni una spaziale ed una temporale, in quanto esse sono disaccoppiate. Cerchiamo dunque una soluzione della (8) del tipo a variabili separate.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = p(t) \mathbf{u}(\mathbf{r}) \quad (10)$$

dove $p(t)$ e $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ sono due funzioni da determinare. Sostituendo solo nella prima delle (8) (la seconda equazione che esprime la divergenza nulla significa solo che il nostro sistema è privo di cariche, infatti stiamo supponendo che nella cavità ci sia il vuoto) si ha

$$p(t) \nabla^2 \mathbf{u}(\mathbf{r}) - \frac{1}{c^2} \dot{p}(t) \mathbf{u}(\mathbf{r}) = 0 \quad ; \quad \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}) = 0 \quad (11)$$

dividendo per $p(t)$ otteniamo

$$\nabla^2 \mathbf{u}(\mathbf{r}) - \frac{1}{c^2} \frac{\dot{p}(t)}{p(t)} \mathbf{u}(\mathbf{r}) = 0$$

dividendo ora per $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ si ha

$$\frac{\nabla^2 \mathbf{u}(\mathbf{r})}{\mathbf{u}(\mathbf{r})} = \frac{1}{c^2} \frac{\ddot{p}(t)}{p(t)}$$

Questa uguaglianza può essere verificata solo se entrambi i membri dell'equazione sono costanti.

Infatti il primo membro è una funzione di t, il secondo di x,y,z, se facciamo variare t, ad esempio, il secondo membro non varia; allora anche il primo non deve variare se vogliamo che l'uguaglianza sia soddisfatta. E viceversa se facciamo variare x,y,z.

Per ragione di opportunità, che sarà evidente tra poco, chiamiamo $-k^2$ questa costante che è detta costante di separazione. Allora l'equazione precedente nel seguente sistema

$$\ddot{p}(t) + k^2 c^2 p(t) = 0 \quad (12)$$

$$\nabla^2 \mathbf{u}(\mathbf{r}) + k^2 \mathbf{u}(\mathbf{r}) = 0 \quad (13)$$

Osserviamo che al fine di avere soluzioni limitate nel tempo deve risultare $k^2 > 0$, si esclude quindi k immaginario, a parte questa restrizione k può essere un qualsiasi numero reale.

La (12) è proprio l'equazione di un oscillatore armonico semplice appena si ponga la pulsazione ω uguale a kc, allora la (12) e (13) divengono:

$$\frac{d^2 p(t)}{dt^2} + \omega^2 p(t) = 0 \quad (\omega = ck; \quad \omega > 0) \quad (14)$$

$$\nabla^2 \mathbf{u}(\mathbf{r}) + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{u}(\mathbf{r}) = 0 \quad (15)$$

L'equazione (14) ha due soluzioni linearmente indipendenti. Come base delle soluzioni possiamo prendere le funzioni seno e coseno, avendosi

$$p(t) = a \sin \omega t + b \cos \omega t \quad (16)$$

Questa soluzione, come noto può anche esprimersi come:

$$p(t) = A \cos(\omega t + \varphi); \quad A = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{con } \varphi \text{ una opportuna costante di fase.}$$

oppure usando la notazione esponenziale:

$$p(t) = \text{Re}[A e^{i(\omega t + \varphi)}] \quad (17)$$

L'equazione (15) è detta equazione di Helmholtz, essa va intesa come equazione agli autovalori.

Per mettere in evidenza questo, possiamo riscriverla così:

$$\nabla^2 \mathbf{u}(\mathbf{r}) = -k^2 \mathbf{u}(\mathbf{r})$$

La teoria ci dice che un'equazione siffatta ammette soluzioni solo per certi valori della costante k (oppure di ω) l'insieme di questi valori prende il nome di spettro degli autovalori, che può essere discreto o continuo a seconda del tipo di equazione e di condizioni al contorno. Ad ogni autovalore

corrisponde una o più soluzioni dette autofunzioni. Quando le soluzioni corrispondenti ad uno stesso autovalore sono più di una, si dice che quell'autovalore è degenere.

Occorre dunque trovare quei particolari valori di k e i corrispondenti autovettori $\mathbf{u}=\mathbf{u}(k)$ che soddisfano l'equazione. La teoria mostra la soluzione della (15) è

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = C_3 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) + C_4 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \quad (18)$$

dove le costanti possono essere in generale complesse ed arbitrarie e dipendono dalle condizioni al contorno. La teoria mostra che è possibile dimostrare che esiste sempre un insieme di autofunzioni della (15) che sono reali e che soddisfano le condizioni di ortonormalità

$$\int_V \mathbf{u}_a(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{u}_b(\mathbf{r}) dV = \delta_{ab} = \begin{cases} 0 & \text{per } a \neq b \\ 1 & \text{per } a = b \end{cases} \quad (19)$$

E che costituiscono un insieme completo di autofunzioni, nel senso che ogni soluzione della (15) che soddisfi le condizioni al contorno imposte può essere espressa come combinazione lineare di un insieme completo di autofunzioni della (15), ortonormali fra loro, con coefficienti dipendenti dal tempo e soddisfacenti l'equazione (14) con $\omega = \omega_a$:

$$E(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0}} \sum_a p_a(t) \mathbf{u}_a(\mathbf{r}) \quad (20)$$

Dove si è introdotta la costante $1/\epsilon_0^{1/2}$ per opportunità. Dunque le funzioni spaziali $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ soddisfano le relazioni di ortonormalità (19) e sono un insieme completo di autofunzioni, aventi gli autovalori ω_a . In accordo con la (9) il campo magnetico è ora

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = -\frac{c}{\sqrt{\epsilon_0}} \sum_a q_a(t) \nabla \times \mathbf{u}_a(\mathbf{r}) \quad (21)$$

dove i coefficienti q_a sono legati ai coefficienti $p_a(t)$ dalla relazione $\frac{dq_a(t)}{dt} = p_a(t)$, del tutto analoga alla relazione che lega l'impulso allo spostamento di un oscillatore armonico (di massa unitaria). Nel caso del campo elettromagnetico alle autofunzioni $\mathbf{u}_a(\mathbf{r})$ si dà il nome di *modi caratteristici* del campo ed agli autovalori ω_a si dà il nome di *frequenze caratteristiche* dei modi di oscillazione. Le (20) e (21) sono allora gli sviluppi dei campi in termini dei modi caratteristici.

Siamo ora in grado di determinare l'energia totale del campo elettromagnetico all'interno della cavità. Essa è data in accordo con l'elettromagnetismo classico

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_V (\epsilon_0 E^2 + \mu_0 B^2) dV$$

Sostituendo in questa espressione gli sviluppi (20) e (21) si ha

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \sum_a p_a q_a \int_V \mathbf{u}_a(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{u}_b(\mathbf{r}) dV + \frac{c^2}{2} \sum_{a,b} q_a p_a \int_V [\nabla \times \mathbf{u}_a(\mathbf{r})] \cdot [\nabla \times \mathbf{u}_b(\mathbf{r})] dV \quad (22)$$

Adesso occorre un po' di matematica.

Il primo termine an secondo membro si calcola facilmente ricordando le relazioni di ortonormalità (19), e vale semplicemente $\frac{1}{2} \sum_a p_a^2$. Il secondo termine è più ostico ed occorre usare l'identità vettoriale $\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot \nabla \times \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \nabla \times \mathbf{b}$, usando la seconda delle (11) e la (15) e l'identità vettoriale $\nabla \times \nabla \times \mathbf{a} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla^2 \mathbf{a}$ si ha

$$(\nabla \times \mathbf{u}_a) \cdot (\nabla \times \mathbf{u}_b) = \nabla \cdot (\mathbf{u}_a \times \nabla \times \mathbf{u}_b) + \frac{\omega_b^2}{c^2} \mathbf{u}_a \cdot \mathbf{u}_b$$

Integriamo ora sul volume V della cavità ed applichiamo il teorema di Gauss

$$\int_V (\nabla \times \mathbf{u}_a) \cdot (\nabla \times \mathbf{u}_b) dV = \frac{\omega_b^2}{c^2} \int_V \mathbf{u}_a \cdot \mathbf{u}_b dV + \int_S (\mathbf{u}_a \times \nabla \times \mathbf{u}_b) \cdot \mathbf{n} dS$$

Dove S è la superficie che racchiude il volume V ed n è il versore normale all'elemento di superficie dS. Questo integrale superficiale è nullo, infatti

$$(\mathbf{u}_a \times \nabla \times \mathbf{u}_b) \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{n} \times \mathbf{u}_a) \cdot (\nabla \times \mathbf{u}_b) = 0 \text{ su } S$$

In virtù delle condizioni di contorno che la componente parallela di **E** e la componente normale di **B** alla superficie risultino nulle che impongono che il campo **E** (e quindi ciascuna delle \mathbf{u}_a) sia parallelo alla normale **n**. infine usando le condizioni di ortonormalità abbiamo

$$\int_V (\nabla \times \mathbf{u}_a) \cdot (\nabla \times \mathbf{u}_b) dV = \frac{\omega_b^2}{c^2} \delta_{ab} \equiv \frac{\omega_a^2}{c^2}$$

Dunque anche le funzioni $\nabla \times \mathbf{u}_a$ sono ortogonali fra loro.

Finalmente possiamo scrivere l'energia totale nel volume della cavità in termini delle funzioni (ancora da determinare) p(t) e q(t):

$$\mathcal{E} = \sum_a \left(\frac{1}{2} p_a^2 + \frac{1}{2} \omega_a^2 q_a^2 \right) \quad (23)$$

Si riconosce immediatamente che l'espressione fra parentesi è proprio l'energia meccanica di un oscillatore, più precisamente è la sua hamiltoniana perché le due variabili sono nello spazio delle fasi.

Questo risultato è molto importante perché mostra che l'energia del campo elettromagnetico può esprimersi come somma di tanti oscillatori armonici semplici (di massa unitaria) di frequenza uguali alle frequenze proprie dei modi della cavità. Questi oscillatori sono tanti quanti i modi caratteristici della cavità e sono completamente disaccoppiati dato che l'energia totale è semplicemente la somma delle energie dei singoli oscillatori e manca ogni termine di interazione. **E' dunque possibile pensare ad un modello che per quanto riguarda l'energia del campo essa sia equivalente alla somma delle energie di un insieme di oscillatori armonici indipendenti.**

Dal punto di vista termodinamico la radiazione nella cavità si comporta come un "gas di oscillatori armonici". Ora ci proponiamo di calcolare esplicitamente le autofunzioni $u_a(\mathbf{r})$ e le frequenze ω_a .

Il numero dei modi caratteristici (e quindi quello degli oscillatori) in una cavità dipende in generale dalla forma e dalla natura di essa. Dal punto di vista matematico questo equivale a dire che il numero di autofunzioni indipendenti della (15) dipende dalle condizioni al contorno. A temperatura ambiente l'emissione di corpo nero ha un massimo intorno ai 10 μm (infrarosso), quindi praticamente in tutti i casi realizzabili le dimensioni del recipiente sono molto maggiori della lunghezza d'onda della radiazione, è sensato pensare allora che in queste condizioni le condizioni al contorno e al forma del recipiente non abbiano importanza.

Supponiamo allora per semplicità di avere un contenitore cubico di spigolo L e se $L \gg \lambda$ i risultati avranno validità generale. Come condizione al contorno imponiamo che i campi siano periodici. La ragione per cui è comodo imporre le condizioni al contorno periodiche è che i campi possono esprimersi in serie tripla di Fourier e le funzioni $u_a(\mathbf{r})$ diventano semplici funzioni trigonometriche. Il campo elettrico ad esempio risulta

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{l,m,n} \mathbf{e}_{l,m,n} A_{l,m,n}(t) \cos \left[\frac{2\pi}{L} (lx + my + nz) + \varphi_{l,m,n}(t) \right] \quad (24)$$

Dove l, m ed n sono degli interi, $A_{l,m,n}(t)$ e $\varphi_{l,m,n}(t)$ funzioni solo del tempo, il versore $\mathbf{e}_{l,m,n}$ dà la direzione della componente di Fourier di indici l, m, n .

Le quantità $A_{l,m,n}(t)$ e $\varphi_{l,m,n}(t)$ sono l'ampiezza e la fase del modo di indici l, m, n . E conveniente introdurre il vettore d'onda \mathbf{k} di componenti

$$k_x = (2\pi/L) l; \quad k_y = (2\pi/L) m; \quad k_z = (2\pi/L) n \quad (25) \quad \text{con } l, m, n \text{ interi. Allora la (24) diventa}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{l,m,n} \mathbf{e}_k A_k(t) \cos[\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \varphi_k(t)] \quad (26)$$

Dove la somma va fatta su tutti i valori permessi dalla (25). Sostituendo la (26) nell'equazione d'onda (8) si arriva all'equazione agli autovalori analoga alla (15) che fornisce le frequenze dei modi caratteristici: $\omega = c k$ (27) ovvero in termini di l, m, n :

$$\omega^2 = \left(\frac{2\pi c}{L} \right)^2 (l^2 + m^2 + n^2) \quad (l, m, n \in \mathbb{Z}) \quad (28)$$

La (27) viene detta relazione di dispersione delle onde elettromagnetiche nel vuoto. Introducendo la relazione $\lambda = 2\pi/k$ e la frequenza $\nu = \omega/2\pi$ la relazione di dispersione (27) diventa:

$$\lambda \nu = c \quad (29)$$

Il valore di ω può essere qualunque fra zero ed infinito e quindi il numero dei modi dell'onda elettromagnetica confinata in una cavità è infinito. Quello che si può fare è di determinare il numero dei modi che hanno frequenze comprese fra ω e $\omega + d\omega$ o in termini finiti nell'intervallo $\Delta\omega$, cioè la cosiddetta densità dei modi. Per fare questo calcolo osserviamo che dalle (25) segue che il numero dei valori di \mathbf{k} con k_x compreso nell'intervallo Δk_x , k_y compreso nell'intervallo Δk_y , e k_z compreso nell'intervallo Δk_z è dato da

$$\Delta N_k = \left(\frac{L}{2\pi} \right)^3 \Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z \quad (30)$$

Si nota per inciso che dall'equazione $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ applicata alla (24) segue la seguente relazione $\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_k = 0$ che esprime il fatto che le onde elettromagnetiche sono trasversali (\mathbf{E} e \mathbf{B} ortogonali al vettore \mathbf{k} , che in un mezzo isotropico definisce la direzione di propagazione dell'onda). Quindi per ogni valore di \mathbf{k} vi sono solo due direzioni indipendenti per \mathbf{E} , corrispondenti a due stati di polarizzazione diversi. A ciascun stato di polarizzazione corrisponde una soluzione indipendente delle equazioni di Maxwell e quindi il numero di modi indipendenti N_k con vettori \mathbf{k} compresi in $\Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z$ si ottiene moltiplicando per due la (30) che diventa (essendo $L^3 = V$):

$$\Delta N_k = 2 \frac{V}{(2\pi)^3} \Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z \quad (31)$$

Ma a noi interessa il numero dei modi di ω compreso in un $\Delta\omega$ fissato e la relazione di dispersione (27) mostra che ω dipende solo dal modulo di \mathbf{k} e non dalla sua direzione. E' necessario determinare quindi il numero dei modi della cavità aventi k compreso in un intervallo fissato Δk . Per fare questo osserviamo che la "spaziatura" tra i vettori d'onda appartenenti a due modi contigui (tali cioè che gli indici l , m ed n differiscano di ± 1) vale $2\pi/L$, in accordo con le (25) e quindi per dimensioni del recipiente molto maggiori delle lunghezze d'onda in gioco, risulta $\Delta k/k \approx \lambda/L \ll 1$. In queste condizioni si può pensare che i vettori d'onda \mathbf{k} dei modi abbiano una distribuzione continua. Allora l'elemento di volume dello spazio delle fasi \mathbf{k} è $dk_x dk_y dk_z$ e la (31) diventa

$$dN_k = \frac{2V}{(2\pi)^3} dk_x dk_y dk_z$$

Il numero di modi aventi modulo k compreso nell'intervallo $k, k + dk$ si ottiene immediatamente passando alle coordinate polari ed integrando sull'intero angolo solido, avendosi:

$$dN_k = \frac{2V}{(2\pi)^3} 4\pi k^2 dk \quad (\text{modi con } k \text{ entro } dk)$$

Infine il numero di modi con ω compreso fra ω ed $\omega + d\omega$ si ottiene dalla relazione $\omega = ck$, dunque

$$dN_\omega = \frac{2V}{(2\pi)^3} (4\pi) \omega^2 d\omega \quad (\text{modi con } \omega \text{ entro } d\omega)$$

Oppure in termini della frequenza ($\nu = \omega/2\pi$)

$$dN_\nu = \frac{8V\pi}{c^3} \nu^2 d\nu \quad (33)$$

Riassumendo: il campo elettromagnetico in una cavità può essere scomposto in un numero infinito, ma numerabile, di modi caratterizzati dal vettore d'onda \mathbf{k} e dallo stato di polarizzazione. Ad ogni modo caratteristico corrisponde un oscillatore armonico di frequenza legata al modulo di \mathbf{k} dalla relazione di dispersione $\omega = c\mathbf{k}$. Questi oscillatori sono indipendenti fra loro. Il numero di oscillatori aventi frequenza compresa tra ν e $\nu + d\nu$ è dato dalla (33)

$$\rho(\nu) = \frac{8V\pi}{c^3} \nu^2 \quad (34)$$

Ad essa viene data il nome di *densità spettrale dei modi*, che come si vede dalla formula cresce con il quadrato della frequenza.

Con questo calcolo termina la trattazione elettromagnetica del campo in una cavità, per completare lo studio occorrerà moltiplicare la densità spettrale dei modi con la loro energia media. Per far questo occorrerà trattare come già anticipato il sistema degli oscillatori come fosse un gas di oscillatori posti in equilibrio termodinamico ad una certa temperatura T .

In termodinamica si chiama "gas" qualsiasi sistema formato da un grande numero di particelle identiche debolmente interagenti tra loro. Consideriamoci allora un sistema formato da un numero N molto grande di particelle identiche debolmente interagenti tra loro. Supponiamo di poter numerare gli stati dinamici di ogni singola particella, indicandoli con il pedice s che può assumere un numero discreto o continuo di valori.

Nel caso classico lo stato dinamico di una particella è individuato dal valore delle tre componenti del suo impulso e delle tre componenti della sua posizione. La legge di distribuzione di Maxwell-Boltzmann dice che in condizioni di equilibrio termodinamico il numero medio di particelle in certo

stato s è dato da $n_s = A e^{-\epsilon_s/k_B T}$ (35) dove ϵ_s è l'energia associata allo stato s . La costante A è una

costante di normalizzazione determinata dalla condizione $\sum n_s = N$ dove la somma è chiaramente estesa a tutti i possibili stati dinamici della particella. I numeri n_s vengono chiamati numeri di occupazione dello stato s . La (35) mostra che stati di uguale energia hanno uguali popolazioni, e che stati s ed s' hanno popolazioni che stanno nel seguente rapporto

$$\frac{n_s}{n_{s'}} = e^{-(\varepsilon_s - \varepsilon_{s'})/k_B T}$$

mentre l'energia totale del gas sarà $\mathcal{E} = \sum_s n_s \varepsilon_s$ e l'energia media riferita ad una singola particella

è

$$\mathcal{E}_{ave} = \frac{\mathcal{E}}{N} = \frac{\sum_s n_s \varepsilon_s}{\sum_s n_s} = \frac{\sum_s \varepsilon_s e^{-\varepsilon_s/k_B T}}{\sum_s e^{-\varepsilon_s/k_B T}} \quad (36)$$

Osservando che ponendo

$$Z = \sum_s e^{-\varepsilon_s/k_B T}$$

Risulta identicamente per l'energia media della particella

$$\mathcal{E}_{ave} = k_B T^2 \frac{\partial}{\partial T} (\ln Z)$$

Alla funzione Z viene data il nome di funzione di partizione.

Lo stato di una particella nello spazio delle fasi determinato dalle tre coordinate spaziali e dalle tre coordinate della quantità di moto è individuato da un punto su tale grafico. Siccome gli stati di una particella classica costituiscono un insieme continuo, è necessario passare dalle sommatorie agli integrali aventi elementi di volume $dp_x dp_y dp_z dx dy dz$. Ora andiamo a considerare il nostro caso di N oscillatori armonici classici unidimensionali. Lo stato di ogni singolo oscillatore è determinato da una sola coordinata q e da un solo impulso coniugato p . L'elemento di volume sarà ora $dp dq$, ricordiamo che l'energia di un oscillatore è

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{2} \omega^2 q^2 \text{ dove } \omega \text{ è la pulsazione.}$$

La funzione di partizione diventa

$$Z = \int e^{-\varepsilon_{(p,q)/k_B T}} d\Gamma = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{p^2 + \omega^2 q^2}{2k_B T}\right] dp dq = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\omega^2 q^2}{2k_B T}\right) dq \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{p^2}{2k_B T}\right) dp = \frac{2\pi}{\omega} k_B T \quad (37)$$

Avendo usato l'integrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$

Dunque l'energia media diventa ora

$$\mathcal{E}_{ave} = k_B T^2 \frac{\partial}{\partial T} \left(\ln \frac{2\pi}{\omega} k_B T \right) = k_B T^2 \frac{1}{T} = k_B T$$

In base alla meccanica classica l'energia media di ogni oscillatore del gas è $k_B T$.

E' questo un caso particolare del principio di equipartizione dell'energia che afferma che ad ogni termine del tipo ax^2 che compare nell'energia classica di un sistema (espressa in funzione delle coordinate generalizzate p e q) compete in media un'energia termica di $\frac{1}{2} k_B T$. Nel nostro caso di un oscillatore armonico $\frac{1}{2} k_B T$ compete all'energia cinetica e $\frac{1}{2} k_B T$ compete all'energia potenziale.

Ultimo passo per arrivare in vetta. Siccome gli oscillatori del campo elettromagnetico sono indipendenti, è possibile applicare direttamente il teorema dell'equipartizione dell'energia ed affermare che se il campo elettromagnetico è confinato in una cavità alla temperatura T in condizioni di equilibrio termodinamico ad ogni oscillatore è associato una energia media $k_B T$.

Alfine la densità spettrale dell'energia sarà semplicemente il prodotto della densità spettrale dei modi (34) per l'energia associata a ciascun modo dell'oscillatore

$$\rho(\nu, T) = \frac{8V\pi}{c^3} \nu^2 k_B T$$

Ma a noi interessa questa quantità riferita all'unità di volume, dunque finalmente

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 k_B T \quad (38)$$

Riottenendo così per altra via (molto più labriosa) la formula di Rayleigh-Jeans.

Vogliamo concludere mostrando ancora un altro percorso possibile per arrivare a questa formula, questa volta sfruttando il potenziale vettore.

Calcolo basato sul potenziale vettore

Ci proponiamo dunque ancora la densità di energia della radiazione $u(\nu, T)$ in equilibrio termico alla temperatura T . Dividiamo il calcolo in due parti (i) la descrizione della radiazione con la determinazione dei gradi di libertà (ii) la determinazione statistica di equilibrio.

Consideriamo una cavità cubica di lato L e prendiamo un sistema di assi cartesiani con l'origine nel centro del cubo e gli assi paralleli agli spigoli. Il campo elettromagnetico nella cavità può essere descritto dal solo potenziale vettore $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ che obbedisce alla seguente equazione delle onde.

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (39)$$

E alla condizione di gauge (di Coulomb) $\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = 0$ (40).

Il campo $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ è definito per x_i appartenente all'intervallo $[-L/2, +L/2]$ e si può quindi sviluppare in serie (tripla) di Fourier, ottenendo

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \sum_{n_1, n_2, n_3} \mathbf{a}_{n_1 n_2 n_3}(t) \exp \left[i \frac{2\pi}{L} (n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3) \right] \quad (41)$$

Ponendo

$$\mathbf{n} \equiv (n_1, n_2, n_3); \quad \mathbf{k} \equiv \mathbf{k}_n = \frac{2\pi}{L} \mathbf{n}; \quad n_i \in \mathbb{Z}$$

la (41) si può scrivere nella forma

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \sum_{n_i = -\infty}^{+\infty} \mathbf{a}_n(t) \exp(i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \quad (42)$$

La (39) ci dà per i coefficienti $\mathbf{a}_n(t)$ l'equazione

$$\ddot{\mathbf{a}}_n(t) = -c^2 k^2 \mathbf{a}_n(t) = -\omega^2 \mathbf{a}_n(t) \quad (43)$$

Dove si è posto $\omega = ck$, con $k = |\mathbf{k}|$, la cui soluzione è

$$\mathbf{a}_n(t) = \mathbf{a}_{n+} e^{i\omega t} + \mathbf{a}_{n-} e^{-i\omega t} \quad (44)$$

La condizione che \mathbf{A} sia reale ci dà per la (42) la relazione $\mathbf{a}_n^*(t) = \mathbf{a}_{-n}^*(t)$ da cui per la (44) si ricava

$a_{n+}^*(t) = a_{-n-}(t)$. Ponendo ora $a_{n-}(t) = a_n(t)$; $a_{n+}(t) = a_{-n}^*(t)$ e cambiando nella sommatoria con a_{n+} in $n - n$, lo sviluppo di \mathbf{A} si può scrivere nella forma

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \sum_{n_i=-\infty}^{+\infty} \mathbf{a}_n \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)) + \mathbf{a}_n^* \exp(-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t))$$

Che come si vede è una quantità reale.

A questo punto la condizione di gauge diventa $\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{a}_n = 0$, vale a dire che per ogni terna (n_1, n_2, n_3) . per cui $\mathbf{k} = \mathbf{k}_n$, risulta fissato, \mathbf{a}_n deve essere ortogonale a \mathbf{k} . Fissiamo allora nel piano ortogonale a \mathbf{k} una coppia di vettori ortogonali $\mathbf{e}_n^{(1)}$ ed $\mathbf{e}_n^{(2)}$, in modo che essi insieme con il vettore \mathbf{k}/k formino una terna di vettori ortogonali, congruente con quella degli assi coordinati. Allora \mathbf{a}_n si potrà scrivere come combinazione lineare di $\mathbf{e}_n^{(1)}$ e $\mathbf{e}_n^{(2)}$

$$\mathbf{a}_n = \sum_{\lambda=1}^2 \mathbf{a}_n^{(\lambda)} \mathbf{e}_n^{(\lambda)}$$

Allora il campo del potenziale vettore si può scrivere nel seguente modo

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \sum_{n_i=-\infty}^{+\infty} \sum_{\lambda=1}^2 \mathbf{a}_n^{(\lambda)} \mathbf{e}_n^{(\lambda)} \exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t) + c.c. \quad (45)$$

Dove c.c. indica il complesso coniugato. Quello della (45) viene chiamato lo sviluppo dei modi normali. Il termine generico dello sviluppo è un'onda piana di ampiezza (complessa) $\mathbf{a}_n^{(\lambda)}$, polarizzazione $\mathbf{e}_n^{(\lambda)}$, vettore di propagazione \mathbf{k} e pulsazione ω .

Le funzioni $\mathbf{e}_n^{(\lambda)} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}$ per i dati valori di n e λ sono le soluzioni delle equazioni (39) e (40) ed il loro insieme costituisce una base ortonormale di funzioni, nella quale una generica soluzione $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ può essere sviluppata.

Il fatto che il dominio su \mathbf{x} sia il cubo di volume finito L^3 ha una notevole conseguenza che questa base risulta numerabile. Infatti un elemento della base è caratterizzato dalla quaterna di numeri interi (n_1, n_2, n_3, λ) dove n_i è un intero e $\lambda = 1, 2$. A ogni quaterna corrisponde un grado di libertà, che corrisponde a un modo normale di oscillazione del campo.

Mentre $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ corrisponde a un ben definito sviluppo (45), la radiazione termica della cavità va pensata come una sovrapposizione incoerente di campi, che può essere descritta assegnando ai vari modi di oscillazione solo dei pesi statistici, che saranno fissati dalle leggi della meccanica statistica.

Dato che i gradi di libertà sono del tutto indipendenti fra loro e supponendo che a modi di oscillazione con la stessa frequenza corrisponda in media la stessa energia, la densità (spettrale) di energia $u(\nu, T)$ si potrà scrivere come prodotto di due fattori

$$u(\nu, T) = \rho(\nu) w(\nu, T) \quad (46)$$

dove

$$\rho(\nu) = \frac{dN}{dV d\nu}$$

rappresenta il numero di modi di oscillazione per unità di volume e per unità di intervallo di frequenza e $w(\nu, T)$ è l'energia media che compete a un singolo modo di oscillazione con frequenza ν , all'equilibrio termico alla temperatura T .

Il calcolo per determinare $\rho(\nu)$ e $w(\nu, T)$ è del tutto analogo a quello effettuato precedentemente, avendosi

$$\rho(\nu) = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2; \quad w(\nu, T) = k_B T$$

Riottenendo così ancora una volta la formula di *Rayleigh-Jeans*

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi}{c^3} k_B T \nu^2$$

5 La legge di Plank

La soluzione del problema dello spettro del corpo nero fu data da Plank nel 1900 con l'introduzione dell'ipotesi della quantizzazione dell'energia, dando così inizio alla Meccanica quantistica. Egli suppose che lo scambio di energia fra la radiazione e le pareti della cavità non avvenga con continuità, ma per quantità discrete, i famosi quanti di energia. Questo corrisponde a supporre che l'energia di ciascun oscillatore possa assumere solo valori discreti. In particolare Plank ipotizzò che i valori dell'energia di un oscillatore di frequenza ν siano dati dalla formula $E_n = nh\nu$ ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$) dove h è una opportuna costante che prenderà il nome "costante di Plank" e vale $h = 6.63 \cdot 10^{-34}$ Js.

La probabilità che un oscillatore, in equilibrio termodinamico alla temperatura T , abbia energia pari ad E_n è data dalla distribuzione di Boltzmann

$$P_n = A e^{-\beta E_n} = A e^{-\beta nh\nu} \quad \text{con} \quad \beta = \frac{1}{k_B T}$$

dove A è la costante di normalizzazione, per cui deve valere

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = A \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\beta h\nu} = 1$$

Sommando la serie geometrica si ottiene $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\beta h\nu} = \frac{e^{\beta h\nu}}{e^{\beta h\nu} - 1} = \frac{1}{1 - e^{-\beta h\nu}}$ e la costante vale

$$A = 1 - e^{-\beta h\nu}$$

dunque la probabilità diventa

$$P_n = (1 - e^{-\beta h\nu}) e^{-n\beta h\nu}$$

Ricordando che l'energia media è definita da

$$E_{ave} = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} n_i E_i}{\sum_{i=0}^{\infty} n_i} = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} E_i e^{-nh\nu/k_B T}}{\sum_{i=0}^{\infty} e^{-nh\nu/k_B T}} = k_B T^2 \frac{\partial}{\partial T} (\ln Z)$$

Dove n_i è la popolazione dello stato dinamico i -esimo e Z è la funzione di partizione

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\beta h\nu} = \frac{e^{\beta h\nu}}{1 - e^{-\beta h\nu}} = \frac{1}{1 - e^{-\beta h\nu}}$$

e non è più lecito ora il passaggio (che avevamo fatto nel calcolo precedente) all'integrazione,

$$\begin{aligned} E_{ave} &= k_B T^2 \frac{\partial}{\partial T} (\ln Z) = k_B T^2 \frac{\partial}{\partial T} \left(\ln \frac{1}{1 - e^{-\beta h\nu}} \right) = k_B T^2 \frac{\partial}{\partial T} [\ln(1 - e^{-\beta h\nu})^{-1}] = -k_B T^2 \frac{\partial}{\partial T} \ln(1 - e^{-\beta h\nu}) = \\ &= -k_B T^2 \left(- \frac{h\nu / k_B}{T^2 (e^{h\nu/k_B T} - 1)} \right) = \frac{h\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1} \end{aligned}$$

$$E_{ave} = \frac{h\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1} \quad (47)$$

Questa è una formula statistica, nel senso che è il prodotto dell'energia di un oscillatore ($h\nu$) per il numero di occupazione media degli oscillatori relativa a quel particolare valore della temperatura.

$$E_{ave} = n_{ave} h\nu = \frac{1}{e^{h\nu/k_B T} - 1} h\nu$$

Dove n_{ave} è proprio il numero di occupazione medio dovuto alla **statistica di Bose-Einstein**, valida per i bosoni (particelle a spin intero o nullo, come i fotoni).

Dunque, ricordando che la densità spettrale dei modi vale (per unità di volume)

$$\rho(\nu) = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2$$

e che la densità di energia specifica è $u(\nu, T) = E_{ave} \rho(\nu)$, si ha

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_B T} - 1} \quad \text{formuladi Plank}$$

(48)

L'intensità specifica invece vale

$$\varepsilon(\nu, T) \equiv I_\nu(\nu, T) = \frac{c}{4} u(\nu, T) = \frac{2\pi h}{c^2} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_B T} - 1} \quad (49)$$

Verifichiamo che da questa formula è possibile riottenere le leggi empiriche di Stefan-Boltzmann e dello spostamento di Wien.

$$I = \frac{c}{4} \int_0^{\infty} E_{ave} \rho(\nu) d\nu = \int_0^{\infty} u_{ave}(\nu, T) d\nu$$

Dunque

$$\begin{aligned} I &= \frac{c}{4} \int_0^{\infty} u(\nu, T) d\nu = \frac{c}{4} \int_0^{\infty} \frac{h\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1} \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 d\nu = \frac{c}{4} \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^{\infty} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_B T} - 1} d\nu = \\ &= \frac{2\pi h}{c^2} \frac{\pi^4}{15 \left(\frac{h}{k_B T} \right)^4} = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15 c^2 h^3} T^4 = \frac{2\pi^5 \cdot (1.38 \cdot 10^{-23})^4}{15 \cdot (3 \cdot 10^8)^2 \cdot (6.63 \cdot 10^{-34})^3} = 5.67 \cdot 10^{-8} T^4 = \sigma T^4 \end{aligned}$$

Per la verifica della legge dello spostamento di Wien occorre prima ricavare dalla (48) la corrispondente relazione in funzione della lunghezza d'onda. Per far ciò imponiamo l'uguaglianza fra la $u(\nu)$ e $u(\lambda)$ nell'intervallo corrispondente, imponiamo cioè che sia $u(\nu) d\nu = -u(\lambda) d\lambda$, dove abbiamo introdotto il segno meno per tener conto del fatto che la frequenza e la lunghezza d'onda sono inversamente proporzionali, perciò ad un aumento dell'uno corrisponde una diminuzione dell'altro. Derivando la relazione $\nu = c/\lambda$ si ha $d\nu/d\lambda = -c/\lambda^2$, dunque

$$\begin{aligned} u(\nu) d\nu &= -u(\lambda) d\lambda \\ u(\lambda) &= -u(\nu) \frac{d\nu}{d\lambda} = -u(\nu) \left(-\frac{c}{\lambda^2} \right) = \frac{c}{\lambda^2} u(\nu) = \frac{c}{\lambda^2} \frac{8\pi h}{c^3} \frac{(c/\lambda)^3}{e^{hc/\lambda k_B T} - 1} = \frac{8\pi h c}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda k_B T} - 1} \end{aligned} \quad (49')$$

Per ottenere λ_{max} occorre porre uguale a zero la derivata della (49') che riscriviamo ponendo per semplicità $x = hc/\lambda k_B T$

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{8\pi k_B^5 T^5}{c^4 h^4} \frac{x^5}{e^x - 1} = A \frac{x^5}{e^x - 1} \\ \frac{du(x)}{dx} &= -\frac{A(e^x(x-5) + 5)x^4}{(e^x - 1)^2} = 0 \end{aligned}$$

$$A(e^x(x-5) + 5)x^4 = 0 \rightarrow e^x(x-5) + 5 = 0$$

Questa equazione trascendentale si risolve numericamente ottenendo la soluzione banale $x_1 = 0$ che non ha significato fisico e la soluzione

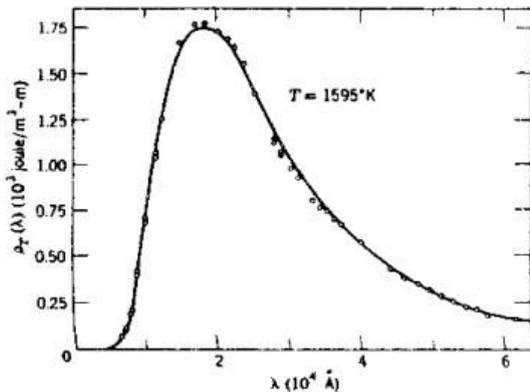
$$x_2 = 4.9651$$

da cui otteniamo

$$x_2 = \frac{hc}{\lambda_{\max} k_B T} \rightarrow \lambda_{\max} = \frac{hc}{x_2 k_B T} = \frac{6.6 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{4.9651 \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} T} = 2.89 \cdot 10^{-3} \frac{1}{T} (m)$$

Derivando così per via teorica la dello spostamento di Wien.

Nella figura seguente vediamo l'ottimo accordo fra i dati sperimentali (rappresentati dai puntini) e l'andamento teorico dettato dalla legge di Plank (linea continua).



Osserviamo che per le alte frequenze ($h\nu \gg k_B T$) questa formula si riduce alla seguente

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi}{c^3} h\nu^3 e^{-h\nu/k_B T}$$

Che tende a zero per frequenza infinita, sanando così la “catastrofe ultravioletta”. Alle basse frequenze ($h\nu \ll k_B T$) invece la formula diventa

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 k_B T$$

Ritrovando la formula classica di Rayleigh-Jeans.

Concludiamo con alcuni esempi numerici circa il valore dell'intensità della radiazione di corpo nero su varie frequenze dello spettro elettromagnetico, pensando ad un corpo nero come il Sole, quindi con temperatura (della fotosfera) di circa 6000 K.

$$I(\nu) = \frac{2\pi h}{c^2} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_B T} - 1}$$

$$\text{Poniamo: } A = \frac{2\pi h}{c^2} = \frac{2\pi \cdot 6.6 \cdot 10^{-34}}{(3 \cdot 10^8)^2} = 4.6 \cdot 10^{-50}; \quad B = \frac{h}{k_B T} = \frac{6.6 \cdot 10^{-34}}{1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 6000} = 7.97 \cdot 10^{-15}$$

e tenendo presente che $e^n = 10^x$; $x = \frac{n}{\ln 10} = \frac{n}{2.3}$ abbiamo:

Onde radio

$$\begin{aligned} I(\nu = 1 \text{ kHz}) &= A \frac{\nu^3}{e^{B\nu} - 1} = 4.6 \cdot 10^{-50} \frac{(10^3)^3}{e^{7.97 \cdot 10^{-15} \cdot 10^3} - 1} = \frac{4.6 \cdot 10^{-41}}{e^{-7.97 \cdot 10^{-12}} - 1} = \frac{4.6 \cdot 10^{-41}}{3.46 \cdot 10^{-12}} = \\ &= \frac{4.6 \cdot 10^{-41}}{1.000000000000797 - 1} = \frac{4.6 \cdot 10^{-41}}{1.000000000000797 - 1} = \frac{4.6 \cdot 10^{-41}}{7.97 \cdot 10^{-12}} = 5.8 \cdot 10^{-30} \text{ W / m}^2 \end{aligned}$$

Microonde

$$\begin{aligned} I(\nu = 10^9 \text{ Hz}) &= A \frac{\nu^3}{e^{B\nu} - 1} = 4.6 \cdot 10^{-50} \frac{(10^9)^3}{e^{7.97 \cdot 10^{-15} \cdot 10^9} - 1} = \frac{4.6 \cdot 10^{-23}}{e^{7.97 \cdot 10^{-6}} - 1} = \frac{4.6 \cdot 10^{-23}}{10^{3.5 \cdot 10^{-6}} - 1} = \\ &= \frac{4.6 \cdot 10^{-23}}{1.0000081 - 1} = \frac{4.6 \cdot 10^{-23}}{1.000000000000797 - 1} = \frac{4.6 \cdot 10^{-23}}{8.1 \cdot 10^{-6}} = 5.7 \cdot 10^{-18} \text{ W / m}^2 \end{aligned}$$

Infrarosso

$$\begin{aligned} I(\nu = 10^{12} \text{ Hz}) &= A \frac{\nu^3}{e^{B\nu} - 1} = 4.6 \cdot 10^{-50} \frac{(10^{12})^3}{e^{7.97 \cdot 10^{-15} \cdot 10^{12}} - 1} = \frac{4.6 \cdot 10^{-14}}{e^{7.97 \cdot 10^{-3}} - 1} = \frac{4.6 \cdot 10^{-14}}{10^{3.5 \cdot 10^{-3}} - 1} = \\ &= \frac{4.6 \cdot 10^{-14}}{1.0000081 - 1} = \frac{4.6 \cdot 10^{-14}}{1.000000000000797 - 1} = \frac{4.6 \cdot 10^{-14}}{8.1 \cdot 10^{-3}} = 5.7 \cdot 10^{-11} \text{ W / m}^2 \end{aligned}$$

Visibile

$$\begin{aligned} I(\nu = 0.5 \cdot 10^{14} \text{ Hz}) &= A \frac{\nu^3}{e^{B\nu} - 1} = 4.6 \cdot 10^{-50} \frac{(0.5 \cdot 10^{14})^3}{e^{7.97 \cdot 10^{-15} \cdot 0.5 \cdot 10^{14}} - 1} = \frac{0.575 \cdot 10^{-8}}{e^{0.399} - 1} = \frac{0.575 \cdot 10^{-8}}{1.49 - 1} = \\ &= \frac{0.575 \cdot 10^{-8}}{0.49} = 1.1 \cdot 10^{-8} \text{ W / m}^2 \end{aligned}$$

Ultravioletto

$$I(\nu = 10^{15} \text{ Hz}) = A \frac{\nu^3}{e^{B\nu} - 1} = 4.6 \cdot 10^{-50} \frac{(10^{15})^3}{e^{7.97 \cdot 10^{-15} \cdot 10^{45}} - 1} = \frac{4.6 \cdot 10^{-5}}{e^{7.97} - 1} = \frac{4.6 \cdot 10^{-5}}{2.89 \cdot 10^3} = 1.6 \cdot 10^{-8} \text{ W / m}^2$$

Raggi X, Gamma

$$I(\nu = 10^{20} \text{ Hz}) = A \frac{\nu^3}{e^{B\nu} - 1} = 4.6 \cdot 10^{-50} \frac{(10^{20})^3}{e^{7.97 \cdot 10^{-15} \cdot 10^{60}} - 1} = \frac{4.6 \cdot 10^{10}}{e^{79.7 \cdot 10^5} - 1} = \frac{4.6 \cdot 10^{-2}}{5.5 \cdot 10^{34} - 1} = 10^{-3470000} \approx 0 \text{ W / m}^2$$

Osservazione finale:

lo spettro del corpo nero copre tutte le frequenze, ma occorre essere chiari sul significato della formula che dà la radiazione di corpo nero. Si tratta di una informazione statistica, e ad ogni frequenza è legata a due fattori:

- quale è la probabilità che un dato stato quantistico della radiazione elettromagnetica contenga un certo numero di fotoni;
- quanti stati esistono per una data frequenza;

Se la frequenza di un fotone è grande, e quindi l'energia ($E = h\nu$) è grande rispetto a $k_B T$, la probabilità che un fotone possa essere eccitato termicamente diviene esponenzialmente piccola, ma non nulla. In altre parole, in linea di principio esiste sempre la possibilità che un fotone gamma possa essere generato da una fluttuazione termica, ma di fatto è piccolissima, come abbiamo visto nell'esempio numerico.

Cosa è realmente quantizzato?

Planck non credeva in realta' che la quantizzazione riguardasse effettivamente l'energia degli oscillatori, nè tantomeno che riguardasse la radiazione elettromagnetica; credeva piuttosto che ad essere quantizzati fossero gli scambi di energia tra oscillatori e radiazione. *but Planck now introduced the startling assumption that the vibrators did not emit energy in a continuous stream, but by a series of instantaneous gushes (J. Jeans).* Einstein non era dello stesso avviso, pur credendo nella validita' della formula, era convinto che la derivazione della formula di Planck contenesse una mostruosa contraddizione, e tentava perciò di darne una diversa interpretazione pensando in particolare alla quantizzazione come ad una proprietà intrinseca della radiazione elettromagnetica. In un lavoro intitolato *Un punto di vista euristico sulla creazione e conversione della luce* (uscito nello stesso anno, 1905, e sulla stessa rivista in cui comparve la teoria della relatività ristretta), Einstein osserva, svolgendo considerazioni di tipo termodinamico, che la formula di Wien per lo spettro del corpo nero, almeno ad alta frequenza dove peraltro funziona bene, suggerisce appunto che la radiazione stessa sia quantizzata e che si comporti come un gas di particelle di energia $h\nu$; queste sarebbero state poi (1926) battezzate fotoni dal chimico statunitense Gilbert N. Lewis. In effetti, partendo da questo assunto, che equivaleva a trasferire alla radiazione le ipotesi di quantizzazione delle energie suggerite da Planck, Einstein mostrerà poco più tardi (1909) che la formula di Planck può essere ricavata studiando le proprietà della sola radiazione elettromagnetica senza bisogno di introdurre i risonatori delle pareti nè tantomeno di dover calcolare, con l'elettromagnetismo classico, i loro scambi di energia con la radiazione.

Il lavoro del 1905 era focalizzato nel mostrare che, con l'idea dei quanti di radiazione, si potevano spiegare meglio le caratteristiche di diversi fenomeni relativi all'interazione radiazione-materia che l'elettromagnetismo classico non riusciva a spiegare. Il punto di forza del lavoro era la brillante interpretazione dell'effetto fotoelettrico, ovvero della produzione di raggi catodici (elettroni) ottenuti illuminando catodi metallici. L'effetto era noto da diverso tempo ma la sua spiegazione lasciava molti punti oscuri. La spiegazione totalmente rivoluzionaria suggerita da Einstein gli fece vincere, nel 1921, il premio Nobel.